Lösungsmethoden für Differentialgleichungen

[R12] *Elefanten*

Die Anzahl N der Elefanten in einem Nationalpark entwickelt sich im Laufe der Zeit in einem extrem vereinfachten Modell gemäß der Differentialgleichung

$$\dot{N} = \alpha N - \beta N^2$$

mit Parametern $\alpha, \beta > 0$. Dabei ist α die initiale Wachstumsrate und β die Abnahme des Futterbestands durch die Elefanten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ leben N_0 Elefanten im Park.

(a) Definiere $y = 1/N$ und schreibe die Gleichung in eine Gleichung für $y(t)$ um.

(b) Löse die Gleichung für $y(t)$ mit der gegebenen Anfangsbedingung.
Tipp: Eine spezielle Lösung lässt sich leicht erraten.

(c) Was ergibt sich für $N(t)$? Welcher Sättigungswert ergibt sich für $N(t \to \infty)$?

[R13] *Raumsonde*

Eine Raumsonde mit Ionenantrieb fliegt mit konstanter Schubkraft F. Das interstellare Medium übt eine Reibungskraft $-R \cdot v$ auf die Raumsonde aus. Der Antrieb verbraucht Materie mit konstanter Rate Γ, sodass die Masse der Sonde $m = m_0 - \Gamma t$ mit der Zeit abnimmt.

(a) Stelle die Bewegungsgleichung ($F_{\text{gesamt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)$) für dieses Problem auf. Finde eine geeignete dimensionslose Variable x, sodass die Gleichung auf die Form $y' - n\frac{y}{x} = -\frac{\alpha}{x}$ gebracht werden kann (hier ist $y(x(t)) = v(t)$). Welche Werte haben α und n dann?

(b) Löse die homogene Gleichung durch Trennung der Variablen und bestimme eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Gib damit die allgemeine Lösung der Gleichung an.
Tipp: spezielle Lösung per Variation der Konstanten oder mit physikalischem Argument erraten.

(c) Bestimme die Lösung für die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$.

(d) Zeige, dass sich für den Fall $F = 0$ und $\Gamma \to 0$ (also ohne Antrieb) aus (b) die Lösung der Gleichung

$$m_0 \dot{v} = -Rv$$

ergibt.

(e) Was ergibt sich für den anderen Grenzfall, $R \to 0$, bei kleinem Γ aber endlichem F für eine Lösung?

[R14] *Sternmodell*

In der Newton'schen Astrophysik betrachtet man oft vereinfachend kugelsymmetrischen Sterne, deren Materie einer sogenannten *polytropen Zustandsgleichung* $P \sim \rho^{1+1/n}$ genügt (P = Druck, ρ = Dichte). Nach Einführen einer neuen Variable $\theta \sim \sqrt[n]{\rho}$ für die Dichte und eines reskalierten Radius $\xi \sim r$ wird das Dichteprofil eines selbstgravitierenden Sterns dann durch die *Lane-Emden-Gleichung*

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right) + \theta^n = 0$$

beschrieben. Die physikalisch relevanten Anfangsbedingungen sind

$$\theta(0) = 1, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0} = 0.$$

Löse die Lane-Emden-Gleichung für den Fall $n = 0$.